pa je i $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty$.

Takođe, možemo videti i da je $f_+ = f \cdot \kappa_P$, gde je $P = \bigcup_{m \in \mathbf{N}, k=2m} [k\pi, (k+1)\pi]$, i $f_- = f \cdot \kappa_N$, gde je $N = \bigcup_{m \in \mathbf{N}, k=2m-1} [k\pi, (k+1)\pi]$, kao i malopre dobijamo da je $\int_0^\infty f_+(x)\, dx = \sum_{m=1, k=2m}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \infty$. Sličnim rezonovanjem $\int_0^\infty f_-(x)\, dx = \infty$, pa integral nije definisan ni u proširenom smislu.

Primer 7.3. Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \kappa_{[n,n+1)}(x)$. Tada nesvojstveni Rimanov integral postoji jer je $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} < \infty$, ali $f \notin L^1(m)$ jer je $\int_\mathbf{R} |f|\ dm = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty$. To smo mogli zaključiti i na osnovu činjenice da je $\int_\mathbf{R} f_+\ dm = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+1} = \infty$, $\int_\mathbf{R} f_-\ dm = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+2} = \infty$, te izraz $\int_\mathbf{R} f\ dm = \int_\mathbf{R} f_+\ dm - \int_\mathbf{R} f_-\ dm$ nije definisan.

Prethodni primeri ukazuju na *apsolutnu* prirodu Lebegovog integrala tj. $f \in L^1(m)$ ako i samo ako $\int_R |f|\ dm < \infty$. Naredna teorema pokazuje da ako je neka merljiva funkcija nenegativna i postoji njen Rimanov nesvojstveni integral, tada postoji i Lebegov nesvojstveni integral i oni su međusobno jednaki.

Teorema 7.2. Neka je $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ merljiva funkcija za koju postoji Rimanov nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx < \infty$. Tada postoji i Lebegov integral $\int_\mathbf{R} f\ dm$ i važi

$$\int_\mathbf{R} f\ dm = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx.$$

Dokaz: Posmatrajmo niz funkcija $f_n = f \cdot \kappa_{[-n.n]}$, $n \in \mathbf{N}$. To je rastući niz merljivih funkcija za koji važi $f_n \nearrow f$, $n \to \infty$.

Na ograničenom intervalu $[-n, n]$ se Rimanov i Lebegov integral poklapaju na osnovu Teoreme 7.1 pa je

$$\int_{-n}^n f(x)\ dx = \int_{-n}^n f_n(x)\ dx = \int_{[-n,n]} f_n\ dm = \int_{[-n,n]} f\ dm. \tag{7.4}$$

Na osnovu uslova zadatka sledi da postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^n f(x)\ dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx < \infty. \tag{7.5}$$

Na osnovu Lebegove teoreme o monotonoj konvergenciji sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n\ dm = \int_R \lim_{n\to\infty} f_n\ dm = \int_R f\ dm. \tag{7.6}$$

Iz (7.4), (7.5) i (7.6) sledi da je $f \in L^1(m)$ i da važi $\int_\mathbf{R} f\ dm = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$. ■